TD_{16} – Isométries

Exercice 1 ★★

Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ★★

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée B. Déterminer les matrices dans la base B des endomorphismes suivants :

1. demi-tour d'axe u avec $u = (1, 2, 2)$;
2. rotation d'axe dirigé et orienté par $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3 ★★

1. Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ?
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 ★★★

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que f est une isométrie. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. Donner une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 5 ★★★

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire habituel. Soit $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{x} + b\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\rangle \overrightarrow{w} + c(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}).$$

On suppose $\overrightarrow{w}$ de norme 1. Déterminer les triplets (a, b, c) réels pour lesquels f est une rotation.

Exercice 6 ★★

Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

On pourra penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 7 ★★★

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \langle x, y\rangle = 0 \;\Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

On pourra commencer par montrer que si x et y sont unitaires, alors $\langle x + y, x - y\rangle = 0$.

Exercice 8 ★★★

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que

$$f^2 = -\mathrm{Id}_E \quad \Longleftrightarrow [\forall x \in E\ ,\ \langle x, f(x)\rangle = 0]$$

Exercice 9 Caractérisation des matrices orthogonales ★★★

Dans cet exercice, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si P est orthogonale, alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PX\| = \|X\|$.
2. Inversement, on suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PX\| = \|X\|$.

   (a) Montrer que $\forall (X, Y) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, $\langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle$.

   (b) En déduire que P est orthogonale.

Exercice 10 ★★★

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

On pose $\sigma = ab + bc + ca$ et $s = a + b + c$

1. Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$
3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 11 ★★★

Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Décomposition polaire ★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique R telle que $R^2 = A^\top A$.
2. On suppose A inversible. Montrer que la matrice R trouvée à la question précédente est inversible.
3. Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice symétrique S et une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$. *On pourra raisonner par analyse-synthèse en cherchant une condition nécessaire sur S.*

Exercice 13 Théorème de Mazur-Ulam ★★★★★

Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \in E^2$ $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

On souhaite montrer qu'alors f est une isométrie.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
3. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E, montrer qu'alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.
4. En utilisant la base orthonormée $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ montrer que f est linéaire
5. Conclure

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★★
(Oral 2019)

Soit $M \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M - I_4$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé

1. Calculer M^3, en déduire que f est une isométrie positive.
2. Donner les valeurs propres complexes de M avec leur multiplicité
3. Soit $X = X_1 + iX_2$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ avec X_1 et X_2 deux matrices de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et soit x_1 et x_2 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés à X_1 et X_2
   (a) Montrer que $P = \text{Vect}(x_1, x_2)$ est un plan stable par f
   (b) En déduire que $P^\perp$ est un plan stable par f
   (c) Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est de la forme par blocs $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ où θ est à préciser.

Exercice 15 ★★★
(Oral 2017, 2019)

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit r une rotation d'axe D avec $r \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et soit s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P

1. On suppose que P et D sont orthogonaux, montrer que $r \circ s = s \circ r$
2. On suppose que $r \circ s = s \circ r$. Que peut-on alors dire de D et P ?

Exercice 16 ★★
(Oral 2019)

Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale
2. Que dire des valeurs propres de A ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 17 ★★
(Oral 2012)

Soit $R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ -1 & 2 & b \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix}$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que R soit la matrice d'une rotation. Trouver alors a, b et c
2. Caractériser cette rotation
3. Déterminer l'image du plan d'équation $x + 2y - z = 0$ par la rotation.

Exercice 18 ★★
(Oral 2023)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et u l'endomorphisme défini par

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad u(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad u(e_n) = e_1$$

1. (a) Écrire la matrice A de u dans $\mathcal{B}$
   (b) Montrer que u est une isométrie.
   (c) Montrer que u est inversible, déterminer son inverse et son déterminant.
2. On pose, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$ et $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que U_k est un vecteur propre de A.
   (b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner son polynôme caractéristique.
3. Pour $n = 3$ déterminer la nature de l'isométrie u.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

- Toutes les matrices sont orthogonales. Aucune de ces matrices n'est symétrique, donc aucune ne représente une symétrie.
- On détermine d'abord si l'endomorphisme associé est direct ou indirect, pour cela on peut calculer le déterminant ou bien, pour les matrices 3×3, déterminer si $C_1 \wedge C_2 = C_3$ (auquel cas l'isométrie est directe) ou bien si $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ (auquel cas l'isométrie est indirecte).
- On détermine ensuite l'axe de cette transformation en cherchant l'espace propre associé à la valeur propre 1 pour les rotations et -1 pour les anti-rotations.
- Enfin on détermine l'angle de cette transformation soit en exploitant la trace et un produit mixte, soit en déterminant une base orthonormée directe adaptée aux éléments géométriques de la transformation.

Méthode

Vous pouvez choisir la méthode de détermination de l'angle que vous préférez, les deux méthodes seront indifféremment utilisées par la suite.

— $\det(A) = 1$. A est donc la matrice d'une rotation.

L'axe de cette rotation est $\mathrm{Ker}(A - I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((1,-1,0))$.

On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (1,-1,0)$, ce qui oriente le plan de la rotation.

Soit θ l'angle de la rotation. On a alors : $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta) = \frac{1}{3}$, d'où $\theta = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$et est de norme 1, le produit mixte $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v})\right]$ vaut alors $\sin(\theta)$

On a ainsi $\sin(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{8}}{3} > 0$

L'angle de la rotation est donc $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Produit mixte

Le produit mixte est invariant par changement de base orthonormée directe. La base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$ est orthonormée directe et, en calculant le produit mixte dans cette base, on a $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v})\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix}$. Ainsi $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v})\right] = \sin(\theta)$

— $\det(B) = 1$. B est donc la matrice d'une rotation.

L'axe de cette rotation est $\mathrm{Ker}(B - I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((1,1,1))$.

On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, ce qui oriente le plan de la rotation.

Le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$ et on a $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (1,1,-2)$. La famille $\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{3}}, \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}, \frac{\overrightarrow{w}}{\sqrt{6}}\right)$ est une base orthonormée directe et, en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à B et θ l'angle de la rotation, on a

$$f\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}\right) = \cos(\theta)\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}} + \sin(\theta)\frac{\overrightarrow{w}}{\sqrt{6}}$$

Ainsi, par expression des coordonnées dans une base orthonormée directe, on a

$$\cos(\theta) = \langle f\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}\right), \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\theta) = \langle f\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}\right), \frac{\overrightarrow{w}}{\sqrt{6}}\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle de la rotation est donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

— $\det(C) = -1$. C est donc la matrice d'une anti-rotation.

L'axe de cette anti-rotation est $\mathrm{Ker}(C + I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((1,-1,1))$.

On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (1,-1,1)$, ce qui oriente le plan de l'anti-rotation.

Soit θ l'angle de l'anti-rotation. On a alors : $\mathrm{Tr}(C) = -1+2\cos(\theta) = 0$, d'où $\theta = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,1,0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$, on a alors

$$\sin(\theta) = \left[\frac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{3}}, \frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'angle de l'anti-rotation est donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

— $\det(D) = 1$, D est donc la matrice d'une rotation.
  L'axe de cette rotation est $\mathrm{Ker}(D - I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((0,1,1))$.
  On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (0,1,1)$, ce qui oriente le plan de la rotation.
  Soit θ l'angle de la rotation. On a alors : $\mathrm{Tr}(D) = 1+2\cos(\theta) = 0$, d'où $\theta = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{2\pi}{3}$.
  Le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,0,0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$ et est de norme 1, le produit mixte $[\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v})]$ vaut alors $\sin(\theta)$

  On a ainsi $\sin(\theta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  L'angle de la rotation est donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

— $\det(E) = -1$. E est donc la matrice d'une anti-rotation.
  L'axe de cette anti-rotation est $\mathrm{Ker}(E + I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((1,0,1))$.
  On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$, ce qui oriente le plan de l'anti-rotation.
  Soit θ l'angle de l'anti-rotation. On a alors : $\mathrm{Tr}(E) = -1 + 2\cos(\theta) = -\frac{5}{3}$, d'où $\theta = \pm\arccos\left(\frac{-1}{3}\right)$.
  Le vecteur $\overrightarrow{v} = (0,1,0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^{\perp}$, on a alors

$$\sin(\theta) = \left[\frac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{2}}, \overrightarrow{v}, f\left(\overrightarrow{v}\right)\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

  L'angle de l'anti-rotation est donc $\theta = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right)$.

— $\det(F) = -1$, F est donc la matrice d'une réflexion d'angle $\arccos\left(\frac{-7}{24}\right)$

Corrigé de l'exercice 2

1. On pose $\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}(1,2,2)$. On a alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{I})^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + 2y + 2z = 0\}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{J} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{I})^{\perp}$ puis on prend $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.
   La base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est orthonormée directe et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, i.e. $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

La matrice cherchée est

$$M = PDP^{-1} = PDP^{\top} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On pose $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. On a alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{I})^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x+y+z=0\}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{I})^{\perp}$ puis on prend $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

   La base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est orthonormée directe et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, i.e. $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   La matrice cherchée est

$$M = PDP^{-1} = PDP^{\top} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Une matrice réelle à la fois symétrique et orthogonale est la matrice d'une symétrie orthogonale.
2. La matrice A est symétrique réelle et ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. A est donc la matrice d'une symétrie orthogonale.

   Ses éléments caractéristiques sont $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A + I_3)$.

   $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est le plan d'équation $-3x + 2y - z = 0$.

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(A + I_3) = (\mathrm{Ker}(A - I_3))^{\perp} = \mathrm{Vect}((-3, 2, -1))$.

   A est donc la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation d'équation $-3x + 2y - z = 0$.

Corrigé de l'exercice 4

1. La matrice de f est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. La matrice de f dans la base canonique (qui est orthonormée) est orthogonale donc f est une isométrie.

   f est une symétrie orthogonale donc ses seules valeurs propres possibles sont 1 et -1.
3. Soit $p = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))$. f est diagonalisable avec comme seules valeurs propres 1 et -1 ainsi $4 = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}))$. On a ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})) = 4 - p$.

   Alors $\mathrm{Tr}(A) = p \times 1 + (4 - p) \times (-1) = 2p - 4$. Or $\mathrm{Tr}(A) = 2$, d'où $p = 3$.

   Ainsi 1 est une valeur propre de multiplicité 3 et -1 de multiplicité 1.

   On en déduit que $\chi_f(X) = (X - 1)^3(X + 1)$.

4. E_1 est le plan d'équation $2x + y - z + t = 0$.

   $((1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0))$ en est une base. En lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt on en déduit que $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, \frac{1}{\sqrt{70}}(4, 2, 5, -5)\right)$ est une base orthonormée de E_1.
5. f est diagonalisable et admet comme seules valeurs propres 1 et -1.

   E_1 et E_{-1} sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

   Soit $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$. $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ car f est une isométrie.

   Or $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Donc $\langle x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$, d'où x et y sont orthogonaux. Donc E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

   Ainsi $E_{-1} = (E_1)^\perp$.

   De plus $(x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow 2x + y - z + t = 0$. Posons $u = (2, 1, -1, 1)$.

   Alors $v = (x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$. Ainsi $E_{-1} = (E_1)^\perp = \mathrm{Vect}(u)$.
6. La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, \frac{1}{\sqrt{70}}(4, 2, 5, -5), \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, -1, 1)\right)$ obtenue en concaténant des bases orthonormées de E_1 et E_{-1} est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

   f est la symétrie orthogonale par rapport à E_1.

Corrigé de l'exercice 5

Quel que soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ soit une base orthonormée directe.

Alors
$$f(\overrightarrow{w}) = (a + b)\overrightarrow{w}, \qquad f(\overrightarrow{I}) = a\overrightarrow{I} + c\overrightarrow{J}, \qquad f(\overrightarrow{J}) = a\overrightarrow{J} - c\overrightarrow{I}$$

$\overrightarrow{w}$ est ainsi un vecteur propre de f et $\overrightarrow{w}^\perp = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est un plan stable par f.

La matrice de f dans la base $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est alors $\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & -c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$

f est une rotation si et seulement si cette matrice précédente est celle d'une rotation.

— Si f est une rotation, alors $a + b$ est une valeur propre de f et $\det(f) = (a + b)(a^2 + c^2) > 0$. Donc $a + b = 1$ et $\overrightarrow{w}$ dirige l'axe de la rotation.

  La restriction de f à $\overrightarrow{w}^\perp$ est alors une rotation plane donc il existe θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$, d'où $b = 1 - \cos(\theta)$.

— Réciproquement, s'il existe θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$ et $b = 1 - \cos(\theta)$, la matrice trouvée est celle d'une rotation. Donc f est une rotation.

Finalement f est une rotation si et seulement s'il existe θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$ et $b = 1 - \cos(\theta)$.

Corrigé de l'exercice 6

Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A, f est une isométrie.

Soit $\overrightarrow{u} = (1, 1, .., 1)$ et U le vecteur colonne associé à u dans la base canonique. Soit $\langle \bullet, \bullet\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a alors $\displaystyle\sum_i \sum_j a_{i,j} = U^\top A U = \langle u, f(u)\rangle$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle u, f(u)\rangle \leqslant \|u\|\|f(u)\|$

Or $\|f(u)\| = \|u\|$, car f est une isométrie et $\|u\| = \sqrt{n}$.

D'où $\left|\displaystyle\sum_i \sum_j a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Corrigé de l'exercice 7

Soit x et y deux vecteurs unitaires, on a alors

$$\begin{aligned}\langle x+y, x-y\rangle &= \langle x, x-y\rangle + \langle y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= 1-1 \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall (x,y)\in E^2, \qquad \|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle f(x+y), f(x-y)\rangle = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall (x,y)\in E^2, \qquad \|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle f(x)+f(y), f(x)-f(y)\rangle = 0$$

ou encore, en développant les produit scalaire

$$\forall (x,y)\in E^2, \qquad \|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \|f(x)\| = \|f(y)\|$$

Soit e un vecteur unitaire de E et $\lambda = \|f(e)\| \geqslant 0$. Soit $u \in E$ non-nul, on a alors $\left\|\dfrac{u}{\|u\|}\right\| = 1$, ainsi, d'après la propriété précédente

$$\left\| f\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \|f(e)\| = \lambda$$

Or $\left\| f\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \dfrac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$ Ainsi

$$\forall x\in E\setminus\{0\}, \qquad \|f(x)\| = \lambda\|x\|$$

Cette relation est clairement aussi vraie pour $x=0$ ainsi

$$\forall x\in E, \qquad \|f(x)\| = \lambda\|x\|$$

Corrigé de l'exercice 8

On travaille par double implication :

— Supposons que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$

Alors

$$\begin{aligned}\langle x, f(x)\rangle &= -\langle f^2(x), f(x)\rangle \qquad \textit{car } f^2 = -\mathrm{Id}_E \\ &= -\langle f(x), x\rangle \qquad \textit{car } f \textit{ est une isométrie}\end{aligned}$$

Ainsi $\langle x, f(x)\rangle = 0$.

— Supposons que, pour tout $x\in E$, $\langle x, f(x)\rangle = 0$

Soit $(x,y)\in E^2$, alors on a

$$\begin{aligned}0 &= \langle f(x,y), x+y\rangle \\ &= \langle f(x), x\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle + \langle f(y), y\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle f^2(y), f(x)\rangle \\ &= \langle f(x), f^2(y)+y\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout couple $(x,y)\in E^2$, on a $\langle f(x), y+f^2(y)\rangle = 0$, ainsi, pour tout $y\in E$, $y+f^2(y)\in \mathrm{Im}(f)^\perp$

f est une isométrie et donc $\mathrm{Im}(f) = E$, ainsi pour tout $y\in E$, $y+f^2(y) = 0$, i.e. $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

On a montré les deux implications, on a donc bien

$$f^2 = -\mathrm{Id}_E \quad \Longleftrightarrow [\forall x \in E\ ,\ \langle x, f(x)\rangle = 0]$$

Corrigé de l'exercice 9

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors on a $\|PX\| = (PX)^\top PX = X^\top \underbrace{PX^\top P}_{=I_n} X = X^\top X = \|X\|^2$.
   Et puisqu'une norme est toujours positive, on en déduit que $\|PX\| = \|X\|$.
2. Soient X et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous savons que

   C'est l'identité de polarisation

$$\|P(X+Y)\|^2 = \|PX\|^2 + 2\langle PX, PY\rangle + \|PY\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle PX, PY\rangle + \|Y\|^2.$$

   D'autre part, on a également

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2$$

   et donc $\|P(X+Y)\|^2 = \|X+Y\|^2 \Rightarrow \langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle$.
   En particulier, si $(X_1, \dots, X_n)$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle X_i, X_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc $\langle PX_i, PX_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Autrement dit $(PX_1, \dots, PX_n)$ est une famille orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de cardinal n, donc c'est une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Toute famille orthonormée est libre.

   Et alors P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique : elle est alors orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées.

   Autre méthode : montrons que $A = P^\top P - I_n$ est la matrice nulle, ce qui prouvera que $P^\top P = I_n$.
   Pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top AY = X^\top P^\top PY - X^\top Y = \langle PX, PY\rangle - \langle PX, PY\rangle$.
   En particulier, pour $X = AY$, il vient $(AY)^\top AY = 0 \Leftrightarrow \|AY\|^2 = 0$.
   Et donc, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AY\| = 0 \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AY = 0$.
   Or, comme $AX = 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $A = 0$ et donc P est orthogonale.

Corrigé de l'exercice 10

1. On a

$$MM^\top = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & bc+ac+ab & bc+ac+ab \\ bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ac+ab \\ bc+ac+ab & bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2-2\sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & s^2-2\sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & s^2-2\sigma \end{pmatrix}$$

   Ainsi $MM^\top = I_3$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s^2 = 1$.

   On a donc bien $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.

2. On a de plus

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & b-c \\ 1 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\left((a-b)(a-c)-(c-b)(b-c)\right) \\
&= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) \\
&= s(s^2-3\sigma)
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\sigma = 0$ et $s^2 = 1$ alors $\det(M) = s$ et donc $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $s = 1$

3. On a

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - sX^2 + \sigma X - abc$$

— Supposons qu'il existe $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.

Alors $X^3 - X^2 + k = (X-a)(X-b)(X-c)$.

Par unicité de l'écriture développée d'un polynôme on a donc $s = 1$ et $\sigma = 0$, d'où $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

— Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, alors a, b et c sont les racines de $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - X^2 - abc$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $-abc \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$. On va pour cela exploiter le fait que a, b et c sont des réels

Considérons la fonction $f : t \mapsto t^3 - t^2 + k$ avec k réel et cherchons à quelle condition cette fonction s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t-2)$, on en déduit le tableau de variations suivant

t	$-\infty$		0		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k - \dfrac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour que f s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que $k \geqslant 0$ et $k - \dfrac{4}{27} \leqslant 0$, i.e. $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$.

C'est le cas ici, on a donc $-abc \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$. Ainsi il existe bien $k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$ tel que a, b et c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.

Corrigé de l'exercice 11

Les matrices A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables en base orthonormée.

$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-a & -b & -b \\ -b & X-a & -b \\ -b & -b & X-a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-a-2b & -b & -b \\ X-a-2b & X-a & -b \\ X-a-2b & -b & X-a \end{vmatrix} \\
&= (X-a-2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & X-a & -b \\ 1 & -b & X-a \end{vmatrix} \\
&= (X-a-2b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-a+b & 0 \\ 1 & 0 & X-a+b \end{vmatrix} \\
&= (X-a-2b)(X-a+b)^2
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $a+2b$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $a-b$ est le plan $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ , } x+y+z=0 \right\}$.

> **Espaces propres**
> Les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux-à-deux orthogonaux. Ici on a donc $E_{a-b}(A) = E_{a+2b}(A)^{\perp}$.

Soit $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, i.e. $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

On a alors $A = PDP^{\top}$.

La matrice B est simplement le cas particulier où $a=0$ et $b=1$, ainsi $B = PDP^{\top}$, où $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 12

1. On a $(A^{\top}A)^{\top} = A^{\top}(A^{\top})^{\top} = A^{\top}A$. La matrice $A^{\top}A$ est donc symétrique réelle.

   Elle est ainsi diagonalisable en base orthonormée.

   Soit λ une valeur propre de $A^{\top}A$ et X un vecteur propre associé. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On a alors $\|X\|^2 = X^{\top}X$ et $X^{\top}A^{\top}AX = X^{\top}\lambda X = \lambda X^{\top}X$.

   Or $X^{\top}A^{\top}AX = (AX)^{\top}AX = \|AX\|^2$. Donc $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

   Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^{\top}A$, qui sont toutes réelles positives.

Il existe une matrice P orthogonale telle que $A^\top A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Posons $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

On a $D = D'^2$, donc $A^\top A = PD'^2P^{-1} = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = R^2$ avec $R = PD'P^{-1}$.

De plus $R^\top = \left(PD'P^{-1}\right)^\top = {P^{-1}}^\top {D'}^\top P^\top = P{D'}^\top P^\top = PD'P^{-1} = R$ (on a $TP = P^{-1}$ car P est orthogonale).

Donc R est symétrique.

Ainsi, il existe une matrice symétrique R telle que $R^2 = TAA$.

2. On suppose A inversible. On a alors $\det(TAA) = \det(A)\det(A^\top) = \det(A)^2 > 0$.

   Or $TAA = R^2$, donc $\det(R)^2 = \det(A)^2 > 0$. Donc $\det(R) \neq 0$. La matrice R trouvée en 1. est ainsi inversible.

3. On va procéder par analyse-synthèse :

   Analyse :

   Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.

   On a alors $A^\top = S^\top Q^\top = SQ^\top$, d'où $A^\top A = S^2$.

   Synthèse

   Soit A inversible, d'après les questions 1. et 2. il existe une matrice S symétrique, inversible telle que $A^\top A = S^2$.

   S est inversible. Posons $Q = AS^{-1}$. On a alors

   $$Q^\top Q = \left(S^{-1}\right)^\top A^\top A S^{-1} = (S^\top)^{-1} S^2 S^{-1} = S^{-1}S = I_n$$

   Ainsi Q est orthogonale.

   Finalement, si A est inversible, il existe une matrice symétrique S et une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $x \in E$, on a
   $$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$
2. Soit $(x, y) \in E^2$, on a alors, d'après les identités de polarisation
   $$\begin{aligned} \langle f(x), f(y)\rangle &= -\frac{\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2}{2} \\ &= -\frac{\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned}$$
3. D'après la question 1. on a, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ et d'après la question 2., $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$. Ainsi la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.
4. Soit $x \in E$, on a alors
   $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i)$$

Ainsi f est l'application $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle f(e_i)$ qui est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire.

5. On a montré que, si est f une application de E dans E telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \in E^2$ $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ alors f est linéaire et vérifie que pour tout $x \in E$ $\|f(x)\| = \|x\|$, f est donc une isométrie.

Corrigé de l'exercice 14

1. On a
$$M^3 = MM^2 = M^2 - M = M - I_4 - M = -I_4$$
Ainsi $\det(M)^3 = \det(M^3) = \det(-I_4) = (-1)^4 = 1$. D'où $\det(M) = 1$, f est ainsi une isométrie positive.
2. Soit λ une valeur propre complexe de M et X un vecteur propre associé. On a alors $M^2X = \lambda^2 X$ et $M^2X = (M - I_4)X = MX - X = (\lambda - 1)X$.

   Puisque $X \neq 0_{4,1}$ on a ainsi $\lambda^2 = \lambda - 1$, d'où $\lambda \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

   La polynôme caractéristique de f est alors de la forme $\chi_f = \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^a \left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^b$ avec a et b deux entiers tels que $a + b = 4$. Or χ_f est un polynôme à coefficients réels donc $\chi_f = \overline{\chi_f} = \left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^a \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^b$. On en déduit que $a = b$ et donc $a = b = 2$.

   Les valeurs propres complexes de f sont ainsi $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ qui sont toutes les deux de multiplicité 2.

   > **Multiplicité**
   > Plus généralement cet argument montre que, si P est un polynôme à coefficients réels et λ est une racine de P de multiplicité m alors $\bar{\lambda}$ est également une racine de P de multiplicité m.

3. Soit $X = X_1 + iX_2$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ avec X_1 et X_2 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   (a) On a $MX = \lambda X$, i.e. $M(X_1 + iX_2) = \lambda(X_1 + iX_2)$. En passant au conjugué on obtient $\overline{MX} = \overline{\lambda X}$, c'est-à-dire $M(X_1 - iX_2) = \bar{\lambda}(X_1 - iX_2)$.

   Alors
   $$MX_1 = \frac{1}{2}M(X + \overline{X}) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}X_1 + \frac{i\lambda - i\bar{\lambda}}{2}X_2 \in \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$$
   Et
   $$MX_2 = \frac{1}{2}M(X - \overline{X}) = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2}X_1 + \frac{i\lambda + i\bar{\lambda}}{2}X_2 \in \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$$
   On a bien $f(x_1) \in P$ et $f(x_2) \in P$. P est donc stable par f

   (b) P est stable par f et f est une isométrie, ainsi $P^\perp$ est stable par f.

   (c) P et $P^\perp$ sont des espaces vectoriels stables par f.

   Notons f_1 la restriction de f à P. f_1 est encore une isométrie et $f_1^2 = f_1 - \mathrm{Id}_P$, ainsi $f_1^3 = -\mathrm{Id}_P$ et donc $\det(f_1)^3 = (-1)^2 = 1$.

   f_1 est ainsi une isométrie positive d'un espace de dimension 2, sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée de P est alors de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$

   De même f_2 la restriction de f à $P^\perp$ a pour matrice dans n'importe quelle base orthonormée de $P^\perp$ une matrice la forme $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$.

   Ainsi, dans une base orthonormée adaptée à la somme directe orthogonale $P \oplus P^\perp$ la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_\phi \end{pmatrix}$.

   On en déduit que le spectre de M est alors le spectre de la matrice $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_\phi \end{pmatrix}$, i.e. $\mathrm{Sp}(M) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$.

   Ainsi $\phi = \theta$ ou $\phi = -\theta$ et $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\}$.

Corrigé de l'exercice 15

1. On suppose que P et D sont orthogonaux, de plus $\dim(P) = 2$ et $\dim(D) = 1$, ainsi $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^3$, il existe $(x_P, x_D) \in P \times D$ tel que $x = x_P + x_D$.

   D est stable par r donc, puisque r est une isométrie $P = D^\perp$ est stable par r, on a ainsi $r(x_D) = x_D$ et $r(x_P) \in P$.

   On sait de plus que, si $y \in P$ alors $s(y) = y$ et si $y \in P^\perp$ alors $s(y) = -y$.

   Ainsi
   $$s \circ r(x) = s(r(x_D)) + s(r(x_P)) = s(x_D) + r(x_P) = -x_D + r(x_P)$$
   Et
   $$r \circ s(x) = r(s(x_D)) + r(s(x_P)) = r(-x_D) + r(x_P) = -x_D + r(x_P)$$
   On a donc bien $r \circ s(x) = s \circ r(x)$, ce pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, d'où $r \circ s = s \circ r$.
2. On suppose que $r \circ s = s \circ r$.

   Soit v un vecteur directeur de $P^\perp$, on a alors $s(v) = -v$.

   Ainsi $r \circ s(v) = r(-v) = -r(v) = s \circ r(v)$. On en déduit que $r(u) \in E_{-1}(s)$.

   Si s n'est pas $-\mathrm{Id}_{R^3}$ alors $E_1(s) = \mathrm{Vect}(v)$ et donc $r(v) \in \mathrm{Vect}(v)$.

   Puisque s est une isométrie on a alors $\|r(v)\| = \|v\|$, ainsi $r(v) = \pm v$

   — Si $r(v) = v$ alors v dirige D et on a donc $D = P^\perp$

   — si $r(v) = -v$ alors $-1 \in \mathrm{Sp}(r)$. r est alors une rotation d'angle π, i.e. une symétrie orthogonale d'axe D. On a alors $P^\perp \subset D^\perp$, d'où $D \subset P$.

   Réciproquement supposons que r est une symétrie orthogonale d'axe D, s une symétrie orthogonale d'axe P avec $D \subset D$. Soit u un vecteur directeur unitaire de D, v tel que (u, v) soit une base orthonormée de P et w un vecteur directeur unitaire de $P^\perp$. Alors, si on note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ on a
   $$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0-1 & \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-1 & \end{pmatrix}$$
   Il est alors aisé de prouver que r et s commutent.

   Finalement on a $D = P^\perp$ ou bien r est une symétrie orthogonale d'axe D avec $D \subset P$.

Corrigé de l'exercice 16

1. On a $AA^\top = I_3$, A est donc une matrice orthogonale.
2. A est une matrice orthogonale donc ses valeurs propres sont toutes de module 1, en particulier ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1.

   On a $\det(A) = 1$, A est donc la matrice d'une rotation.

   L'axe de cette rotation est $\mathrm{Ker}(A - I_3)$. L'axe est donc $\mathrm{Vect}((2, 0, 1))$.

   On oriente l'axe à l'aide du vecteur $\overrightarrow{u} = (2, 0, 1)$, ce qui oriente le plan de la rotation.

   Soit θ l'angle de la rotation. On a alors : $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta) = \dfrac{11}{7}$, d'où $\theta = \pm \arccos\left(\dfrac{2}{7}\right)$.

   Le vecteur $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})^\perp$ et est de norme 1, le produit mixte $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v})\right]$ vaut alors $\sin(\theta)$

   On a ainsi $\sin(\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{3}{7} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{-6}{7} \end{vmatrix} = \dfrac{-3\sqrt{5}}{7} < 0$

L'angle de la rotation est donc $\theta = -\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$.

Corrigé de l'exercice 17

1. R est la matrice d'une rotation si et seulement si l'image de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, i.e. si et seulement $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   Ainsi R est la matrice d'une rotation si et seulement si $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$.
2. On reprend la méthode des exercices 1 et 16., on obtient que R est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{u} = (1, 1, -1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$
3. Notons r la rotation associé à R dans la base canonique. Le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ est dirigé par $\overrightarrow{a} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{b} = (0, 1, 2)$. Son image est alors $\mathrm{Vect}(r(\overrightarrow{a}), r(\overrightarrow{b}))$.

   Or $r(\overrightarrow{a}) = (1, -1, 0)$ et $r(\overrightarrow{b}) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

   Ainsi l'image du plan d'équation $x + 2y - z = 0$ par r est le plan $\mathrm{Vect}((1, -1, 0), (4, -2, 5))$.

   Par ailleurs $\mathrm{Vect}((1, -1, 0), (4, -2, 5))^\perp = \mathrm{Vect}(5, 5, 2)$, ainsi le plan $\mathrm{Vect}((1, -1, 0), (4, -2, 5))$ est le plan d'équation $5x + 5y + 2z = 0$.

Corrigé de l'exercice 18

1. (a) On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) u envoie la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ sur la famille $(e_2, \cdots, e_n, e_1)$ qui est également une base orthonormée. Ainsi u est une isométrie.

   (c) Puisque u est une isométrie, elle est inversible. De plus, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, A est une matrice orthogonale, d'où

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1} = A^T$$

   Ainsi u^{-1} est l'application linéaire définie par

   $$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad u(e_i) = e_{i-1} \quad \text{et} \quad u(e_1) = e_n$$

   Enfin on a $\det(u) = \det(A) = (-1)^{n+1}\det(I_{n-1}) = (-1)^{n+1}$ par développement par rapport à la dernière colonne.

2. On pose, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ et $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$.

   (a) Remarquons que les complexes ω_k sont les racines n de l'unité et qu'à ce titre on a $\omega_k^n = 1$.

On a alors

$$AU_k = \begin{pmatrix} \omega_k^{n-1} \\ 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_k} \\ \dfrac{\omega_k}{\omega_k} \\ \dfrac{\omega_k^2}{\omega_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\omega_k^{n-1}}{\omega_k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_k} U_k = \omega_{n-k} U_k$$

Ainsi U_k est un vecteur propre de A pour la valeur propre ω_{n-k}.

(b) De la question précédente on en déduit que $\{\omega_{n-k}\ ,\ k \in [\![0, n-1]\!]\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.

C'est-à-dire $\{1, \omega_k, \cdots, \omega_{k-1}\} \subset \mathrm{Sp}(A)$. Comme A est une matrice de taille n elle admet au maximum n valeurs propres. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}\}$.

A est alors une matrice carrée de taille n qui admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

De plus

$$\chi_A = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = X^n - 1$$

3. Considérons que la base $\mathcal{B}$ est directe.

Pour $n = 3$ on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question 1.(c), $\det(A) = 1$, A est donc une isométrie positive donc une rotation.

On a $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De plus $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Soit $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors $AV = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis

$$\sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(U, V, AV) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, u est la rotation d'axe dirigé et orienté par le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.